

## ANÁLISE CONFIABILÍSTICA DO ESTADO LIMITE DE FLECHA IMEDIATA EM VIGAS DE MADEIRA SUBMETIDAS À FLEXÃO

**AZEVEDO, Hugo Vinícius Ferreira<sup>1</sup>;**

**SILVEIRA, Gabriel Torres da<sup>2</sup>;**

**FREITAS, Gabriel de Carvalho<sup>3</sup>;**

**OLIVEIRA, Igor de Melo Nery<sup>4</sup>;**

**LIMA JUNIOR, Eduardo Toledo de<sup>5</sup>.**

<sup>1</sup> Graduando em Engenharia Civil, UFAL, Maceió-AL (hugovazevedo@gmail.com).

<sup>2</sup> Graduando em Engenharia Civil, UFAL, Maceió-AL (gabriel.silveira@ctec.ufal.br).

<sup>3</sup> Graduando em Engenharia Civil, UFAL, Maceió-AL (gabriel.freitas@ctec.ufal.br).

<sup>4</sup> Mestrando em Engenharia Civil, UFAL, Maceió-AL (igornery@lccv.ufal.br).

<sup>5</sup> Professor, UFAL, Maceió-AL (limajunior@lccv.ufal.br).

**Resumo.** *A crescente evolução dos materiais estruturais, e o conseqüente aumento da complexidade das estruturas, demandam um maior conhecimento dos níveis de segurança para os quais são projetadas. A análise de confiabilidade aplicada ao projeto estrutural pode ser construída com base na avaliação das incertezas das variáveis de projeto, de forma que a probabilidade de falha da estrutura pode ser prevista, com valor adequado, ainda na fase de projeto. Este trabalho tem como objetivo estudar a confiabilidade estrutural de vigas de madeira da espécie *Eucalyptus citriodora* submetidas à flexão, num contexto de estado limite de flecha imediata, utilizando o método de simulação de Monte Carlo e o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), ambos implementados em linguagem de programação Python, para a determinação da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade.*

**Palavras-chave:** *Confiabilidade Estrutural, FORM, Monte-Carlo, Flecha Máxima.*

## 1 INTRODUÇÃO

Com o avanço da engenharia de estruturas, novos materiais e modelos de análise, e o consequente aumento na complexidade e arrojo dos conjuntos estruturais, surge uma demanda de conhecimento dos níveis de segurança para os quais estes são projetados. As incertezas inerentes aos problemas de engenharia estrutural podem ser avaliadas a partir da descrição estatística de suas variáveis de projeto – dimensionais, mecânicas e de carregamento – e incorporadas ao mesmo com o uso de modelos de confiabilidade estrutural.

A Teoria de Confiabilidade Estrutural se apresenta como uma importante ferramenta para estudar a durabilidade e segurança de produtos, dentro de um enfoque probabilístico. A partir de uma análise confiabilística em um projeto estrutural, é possível verificar a probabilidade de falha da estrutura para um determinado estado limite.

Dessa forma, o presente trabalho aplica um modelo confiabilístico à análise de uma viga biapoiada, sujeita à flexão, de modo que se possa construir as funções de falha correspondentes ao serviço de flecha imediata, e avaliar sua probabilidade de ocorrência.

## 2 METODOLOGIA

Os modelos confiabilísticos necessitam quantificar informações a respeito das incertezas associadas às variáveis de projeto, modeladas como variáveis aleatórias (v.a.). Estas devem ser avaliadas a partir de dados estatísticos do controle de qualidade de produção, a partir da caracterização estatística dos dados amostrais, a fim de modelar distribuições estatísticas candidatas a representar adequadamente os dados, para que os modelos sejam utilizados nas técnicas confiabilísticas em estudo. Maiores detalhes acerca dos conceitos estudados estão dispostos a seguir.

### 2.1 Conceitos de probabilidade e estatística inferencial

Pode-se definir variável aleatória como uma função que atribui um número real a cada resultado no espaço da amostra de uma experiência aleatória (MONTGOMERY; RUNGER, 2003). Como as v.a. estão sempre associadas a uma probabilidade, define-se que a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória é dada matematicamente por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (1)$$

sendo  $F_X(x)$  a Função de Distribuição de Probabilidade (CDF).

O valor da *CDF* num determinado ponto representa a probabilidade de ocorrência de todos os valores da variável aleatória menores ou iguais ao ponto. Sua derivada também possui um importante valor estatístico e denomina-se função de densidade de probabilidade (PDF), determinada matematicamente como segue.

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (2)$$

## 2.2 Teoria da confiabilidade estrutural

De acordo com Beck (2014), a confiabilidade estrutural é o grau de confiança (probabilidade subjetiva) de que um sistema não falhe dentro de um período de tempo especificado e respeitadas as condições de operação (projeto) do mesmo. Nesse sentido, o evento complementar à confiabilidade, denominado de probabilidade de falha ( $P_f$ ), é definido pelo autor como sendo a probabilidade (subjetiva) de que o sistema falhe, não atendendo as especificações do projeto. É avaliada com base numa função de desempenho do sistema em estudo, conhecida como função de falha. Geralmente essa função é denotada por  $G(\mathbf{X})$ , em que  $\mathbf{X}$  é um vetor representando as variáveis de projeto a serem analisadas. O formato dessa função de falha costuma seguir o padrão apresentado na Eq. (3).

$$G(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}_1) - S(\mathbf{X}_2) \quad (3)$$

De modo que,  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são subvetores do vetor  $\mathbf{X}$  em que as variáveis aleatórias associadas à resistência da estrutura estão em  $\mathbf{X}_1$  e as solicitações estão em  $\mathbf{X}_2$ .

A função de falha é definida de forma que valores negativos representam falha e valores positivos representam não falha. A partir disso, define-se a fronteira entre os domínios de falha  $\Omega_f$  e de sobrevivência  $\Omega_s$  da estrutura. Assim, o limite da falha é definido quando  $G(\mathbf{X}) = 0$ . A probabilidade de falha, por sua vez, pode ser entendida como uma medida da propensão à violação de estados limites, definida pela Eq. (4), na qual  $\Omega_f$  é o domínio de falha  $G(\mathbf{X}) \leq 0$  e  $f_X$  é a PDF conjunta das v.a..

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(x) dx \quad (4)$$

## 2.3 Método de simulação Monte-Carlo

Muito usado em problemas de confiabilidade, o método consiste em gerar randomicamente  $K$  valores para cada v.a., dispostos numa ordem aleatória. A partir disso, esses valores são combinados para serem avaliados na função de falha, de modo que a análise da probabilidade de falha é dada pelo percentual de valores menores do que zero (que representam falha) em relação ao número total de simulações. O número mínimo de cenários para uma simulação Monte Carlo é definido por Ang & Tang (2007) na Eq. (5), em que  $COV$  representa o coeficiente de variação da probabilidade falha. Para fins ilustrativos, a obtenção de uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-3}$ , com um  $COV$  de 5%, demanda cerca de  $4 * 10^5$  simulações.

$$N_{min} = \frac{1}{COV^2} * \frac{1-P_f}{P_f} \quad (5)$$

## 2.4 Métodos FORM

Dentre os métodos analíticos conhecidos para estimar o índice de confiabilidade, destaca-se o *FORM*. Tal método tem como base a representação das v.a. do problema como variáveis normais equivalentes, e a aproximação de primeira ordem da função de falha em torno do ponto de uma iteração corrente, o que pode gerar uma imprecisão na resposta calculada, uma vez que a função de falha pode não ser bem representada por uma reta.

Solucionar problemas de confiabilidade via método *FORM* consiste em achar o ponto da superfície de falha mais próximo da origem do espaço normal reduzido, por meio da resolução de um problema de otimização não linear, cuja restrição é a própria função de falha.

## 2.5 Formulação do problema

Apresenta-se a análise de confiabilidade de um problema de viga biapoiada submetida à ação de uma carga distribuída com uso do método de simulação Monte-Carlo e de transformação *FORM*, ver Figura 1, considerando-se o modo de falha associado a um deslocamento inadmissível no meio do vão.

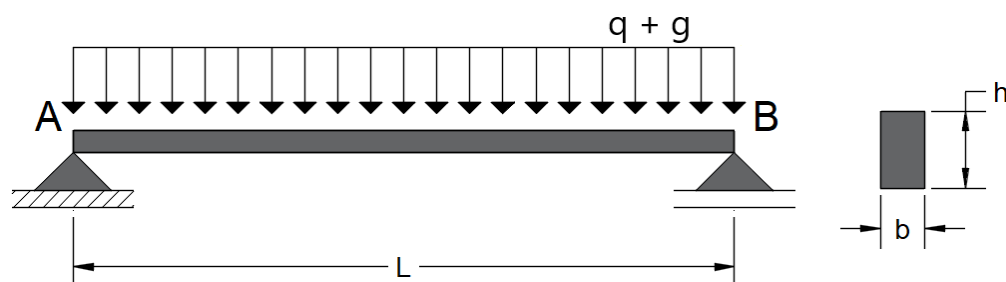


Figura 1 - Modelo de viga a ser analisado. Fonte: Autores (2019).

O deslocamento crítico, no meio do vão, de uma viga biapoiada, de seção retangular constante e material elástico linear, é definida em termos de sua rigidez à flexão, conforme Eq. (6).

$$P_{cr} = \frac{5(g+q)L^4}{384EI} \quad (6)$$

$$I = \frac{b.h^3}{12} \quad (7)$$

Nesta,  $g$  representa o valor do carregamento permanente que a viga está submetida,  $q$  o valor do carregamento variável,  $L$  o comprimento da peça,  $E$  o módulo de young e  $I$  o momento de inércia da seção transversal, definido na Eq. (7).

Admitindo-se a espécie *Eucalyptus citriodora*, sua ocorrência natural causa incertezas quanto às propriedades físicas do material. A partir de Ballarin *et al* (2003), a caracterização desse tipo de madeira fornece um módulo de elasticidade com média e desvio padrão

apresentados na Tabela 1. As dimensões determinísticas de  $b$ ,  $h$  e  $L$  são iguais a, respectivamente,  $0.3\text{ m}$ ,  $0.45\text{ m}$  e  $6\text{ m}$ .

**Tabela 1 - Valores aleatórios da viga. Fonte: Autores (2019).**

Característica	Módulo de Elasticidade (E)	Carga variável	Carga permanente
Símbolo	E	q	g
Valor Médio	$1.6583 * 10^{10}\text{ Pa}$	$2.5 * 10^4\text{ N/m}$	$10^5\text{ N/m}$
Desvio Padrão	$2.483 * 10^9\text{ Pa}$	$6.25 * 10^3\text{ N/m}$	$2 * 10^4\text{ N/m}$
Distribuição	Normal	Normal	Normal

A partir da NBR 7190 (1997), tem-se que a flecha admissível de uma viga de madeira é  $L/200$ . Nesse sentido, a função de falha para o problema proposto é apresentada na Eq. (8), na qual o primeiro termo representa a flecha admissível da viga, e o segundo termo traz a flecha máxima atuante.

$$G = \frac{L}{200} - \frac{5(g+q)L^4}{384E\left(\frac{bh^3}{12}\right)} \quad (8)$$

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da formulação de Monte Carlo, para a obtenção da  $P_f$  característica do problema, são necessárias cerca de 400 mil simulações. Adotando-se esse valor, houve probabilidade de falha de  $3.655 * 10^{-3}$ , com um índice de confiabilidade  $\beta = 2.68$ . A partir de  $5 * 10^5$  simulações, obteve-se uma probabilidade de falha de  $3.714 * 10^{-3}$  e índice de confiabilidade  $\beta = 2.67$ , o que demonstra bem a convergência do método para o problema em questão.

**Tabela 2 - Valores da análise confiabilística via Monte Carlo. Fonte: Autores (2019).**

<i>Simulações</i>	$\beta$ (Monte Carlo)	$P_f$ (Monte Carlo)
$4 * 10^5$	2.68	$3.655 * 10^{-3}$
$5 * 10^5$	2.67	$3.714 * 10^{-3}$
$7 * 10^5$	2.67	$3.711 * 10^{-3}$

Já no método *FORM*, a probabilidade de falha fornecida foi de  $2.401 * 10^{-3}$ , com um índice de confiabilidade  $\beta = 2.82$ , apresentando um erro relativo de cerca de 5.6% em relação à resposta de referência dada por Monte Carlo.

Os resultados obtidos pela formulação de Monte Carlo, apresentados na Tabela 2, podem ser comparados com o índice de confiabilidade estabelecido pelo *Joint Committee on Structural Safety*, (JCSS, 2000), a qual indica que para o estado limite de flecha imediata, o valor de Índice de Confiabilidade Alvo para garantir a segurança de uma viga de madeira é de  $\beta = 1.7$ . Os valores obtidos pelos dois métodos utilizados são superiores ao valor recomendado.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentou uma metodologia para estimar a segurança de vigas de madeira, submetidas à flexão, levando em conta o estado limite de flecha imediata. A partir do estudo realizado foi possível observar que as metodologias probabilísticas para níveis de segurança, além da correta caracterização estatística das variáveis de projeto, são de suma importância para a avaliação de segurança de peças estruturais.

Deve-se destacar que a violação de deslocamentos admissíveis constitui um típico Estado Limite de Serviço (ELS), o qual não necessariamente compromete o desempenho da estrutura. Tal fato explica a admissibilidade de  $\beta = 1.7$  preconizada pelo JCSS.

#### AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro. Ao Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV), pela infraestrutura disponibilizada e ao Programa Especial de Capacitação Discente (PEC), pelo fomento à pesquisa científica.

#### REFERÊNCIAS

ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. , 2007. **Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering**. John Wiley & Sons.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1997. **NBR 7190: Projeto de estruturas de madeira - Técnicas**. Rio de Janeiro: ABNT. p. 107.

BALLARIN, A. W.; NOGUEIRA, M.; CLARO, D. R. , 2003. **Caracterização Elástica da Madeira de Eucalyptus citriodora**. CERNE, p. 66–80.

BECK, A. T. , 2014. **Confiabilidade Estrutural**. São Paulo: Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

JCSS (Joint Committee on Structural Safety), 2000. **Probabilistic Model Code – Part 1 – Basis of Design**.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C., 2003. **Applied Statistics and Probability for Engineers**. John Wiley & Sons, Inc..