

## OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE APLICADA AO DIMENSIONAMENTO DE PILARES VIA CARGA CRÍTICA DE EULER

**SILVEIRA, Gabriel Torres da**<sup>1</sup>;  
**FREITAS, Gabriel de Carvalho**<sup>2</sup>;  
**AZEVEDO, Hugo Vinícius Ferreira**<sup>3</sup>;  
**LIMA Jr., Eduardo Toledo**<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Graduando, UFAL, Maceió-AL (gabriel.silveira@ctec.ufal.br).

<sup>2</sup> Graduando, UFAL, Maceió-AL (gabriel.freitas@ctec.ufal.br).

<sup>3</sup> Graduando, UFAL, Maceió-AL (hugovazevedo@gmail.com).

<sup>4</sup> Doutor, UFAL, Maceió-AL (limajunior@lccv.ufal.br).

**Resumo.** *A contínua busca por soluções de engenharia que visam minimizar os custos associados a um dado empreendimento motiva o desenvolvimento e utilização de técnicas de otimização. Tais técnicas são, em sua maioria, baseadas em formulações matemáticas que se valem de parâmetros físicos descritos por valores pontuais que não representam a complexidade da situação analisada, ocasionando em incertezas acerca do resultado final. Tais incertezas podem, e devem, ser quantificadas com o propósito de que sejam incluídas no processo de otimização a fim de que a busca por soluções ótimas respeite critérios de segurança pré-estabelecidos. Dessa forma, o presente trabalho visa contribuir para a produção científica nacional e assim, incentivar a adoção de métodos de otimização baseada em confiabilidade nos mais diversos âmbitos da engenharia.*

**Palavras-chave:** *Confiabilidade estrutural, Estruturas, Otimização confiabilística, Single loop.*

## 1 INTRODUÇÃO

Pilares são elementos estruturais verticais comumente utilizados para receber esforços normais e, portanto, devem resistir à compressão e à flambagem. Ao se considerar a fase elástica do material empregado, a carga crítica de flambagem é obtida pela fórmula de Euler, a qual é explicitada pela Eq. (1):

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2} \quad (1)$$

Em que:

$P_{CR}$  – Carga crítica de flambagem [N];

$E$  – Módulo de elasticidade longitudinal do material [Pa];

$I$  – Menor dos momentos de inércia da seção transversal da peça [m<sup>4</sup>];

$L_e$  – Comprimento de flambagem da peça [m].

Tradicionalmente, o dimensionamento de um pilar inicia-se pelo pré-dimensionamento de sua seção transversal, seguido da verificação da capacidade resistente dessa configuração. Em alguns casos, o projetista estrutural se vale de técnicas de otimização determinística, a fim de encontrar as dimensões ótimas e, assim, minimizar o custo global do empreendimento.

Contudo, as abordagens supracitadas não levam em consideração as incertezas inerentes aos mais diversos projetos de engenharia, a não ser pela inclusão de coeficientes de segurança ( $\gamma$ ) referentes aos estados limites analisados nos equacionamentos adotados. Dessa forma, a teoria da confiabilidade estrutural surge com o intuito de quantificar essas incertezas como variáveis aleatórias (V.A's) e, assim, avaliar a probabilidade de um elemento estrutural atingir um estado limite (SAGRILO, 2003) ou de deixar de atender especificações de projeto (BECK, 2014).

Ao se orientar a busca por soluções ótimas no dimensionamento de elementos estruturais levando em consideração incertezas de natureza quaisquer, tem-se a definição de um problema de otimização baseada em confiabilidade (RBDO). Em suma, o método *Single Loop* utilizado no presente trabalho para solucionar o problema de RBDO consiste em transportar as V.A.s de um espaço confiabilístico para um espaço determinístico (SHAN & WANG, 2007) e, assim, garantir que a busca pela solução ótima se dê em um conjunto de valores que obedeçam às restrições de desempenho e a um nível de segurança pré-determinado pelo usuário do método.

## 2 METODOLOGIA

O presente trabalho visa ilustrar e detalhar as etapas do dimensionamento ótimo de um pilar biarticulado, submetido a compressão simples, ao se considerar incertezas referentes ao material empregado e à carga atuante. Ainda, busca-se comparar os resultados obtidos por meio

da otimização confiabilística com aqueles obtidos tradicionalmente e, mediante otimização determinística.

## 2.1 Formulação do Problema

Deseja-se minimizar a área da seção transversal de um pilar retangular de 3 metros de altura, constituído de concreto e submetido a uma carga ( $P$ ) atuante sobre o eixo de simetria da seção. Desse modo, a função objetivo a ser minimizada é expressa pela Eq. (2):

$$A(b, h) = b \cdot h \quad (2)$$

Em que:

$A$  – Área da seção transversal [m<sup>2</sup>];

$b$  – Comprimento da seção transversal [m];

$h$  – Altura da seção transversal [m].

As incertezas referentes ao material e à carga atuante foram quantificadas, de modo a serem representadas por uma distribuição de probabilidades, cujas características são apresentadas na Tabela 1, a seguir:

**Tabela 1. Caracterização das variáveis aleatórias. Fonte: Autores (2019)**

| Variável    | Média ( $\mu$ ) | Desvio Padrão ( $\sigma$ ) | Distribuição |
|-------------|-----------------|----------------------------|--------------|
| $\tilde{E}$ | 25 GPa          | 1,25 GPa                   | Gaussiana    |
| $\tilde{P}$ | 195 KN          | 19,5 KN                    | Gaussiana    |

De posse das informações acerca das variáveis aleatórias do problema, resta formular a restrição de desempenho, a qual é expressa pela Eq. (3):

$$G(\tilde{E}, \tilde{P}, b, h) = \frac{\pi^2 \cdot \tilde{E} \cdot b^3 \cdot h}{12 \cdot L_e^2} - \tilde{P} \quad (3)$$

Atenta-se para o fato de que o primeiro termo da Eq. (3) é derivado da Eq. (1). Além disso, é possível caracterizar o dimensionamento como falho, caso a Eq. (3) assuma um valor menor ou igual a 0, e seguro, caso contrário.

Ainda, impõe-se que a base da seção transversal deve ser menor ou igual à altura da mesma, e que suas dimensões sejam de, no máximo, 0,12 m.

## 2.2 Single Loop

Conforme mencionado anteriormente, deseja-se transportar as V.A's para um espaço determinístico. Portanto, aplica-se a seguinte transformação:

$$x_{i,j} = \mu_i - \beta_j \cdot \sigma_i \cdot \left\{ \frac{\sigma_i \left[ \frac{\partial G_j(\bar{X})}{\partial \bar{x}_i} \right]}{\sqrt{\sum_i^n \left[ \sigma_i \left( \frac{\partial G_j(\bar{X})}{\partial \bar{x}_i} \right) \right]^2}} \right\}, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (4)$$

Em que  $n$  e  $m$  são o número de V.A's e o número restrições de desempenho, respectivamente. O termo  $\beta$  é referente ao índice de confiabilidade atribuído à  $j$ -ésima restrição de desempenho e denota uma medida de segurança pertinente ao dimensionamento, sendo diretamente ligado à probabilidade de que a restrição não seja atendida.

Dessa forma, substituem-se as variáveis obtidas pela Eq. (4) na Eq. (3), obtendo-se uma nova restrição de desempenho, isenta de aleatoriedades. Logo, é possível prosseguir para a resolução do problema, através de um processo de otimização determinística.

## 3 RESULTADOS

No que tange ao dimensionamento tradicional, atribui-se um coeficiente de segurança ( $\gamma = 1.4$ ) para a formulação apresentada na Eq. (1), tendo como base a NBR 8681 (2003). Dessa forma, adotaram-se os valores médios das V.A's como parâmetros nominais de projeto e atribuíram-se valores para a base da seção transversal, obtendo-se em seguida o respectivo valor para a altura da seção transversal, conforme a Eq. (5):

$$h = \frac{P \cdot 12 \cdot \gamma \cdot L_e^2}{\pi^2 \cdot E \cdot b^3} \quad (5)$$

Com relação ao dimensionamento por otimização determinística, a restrição de desempenho é obtida a partir da Eq. (3), acrescida do coeficiente de segurança supracitado, conforme a Eq. (6), a seguir:

$$F(E, P, b, h) = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot b^3 \cdot h}{12 \cdot L_e^2} - P \geq 0 \quad (6)$$

De posse dos dimensionamentos, aplica-se o *First Reliability Order Method* (FORM), a fim de se obter o índice de confiabilidade para a configuração adotada. Maiores detalhes acerca do método podem ser vistos em Melchers (1999).

Por fim, os resultados são apresentados em função da área da seção transversal e do índice de confiabilidade, conforme a Figura 1:

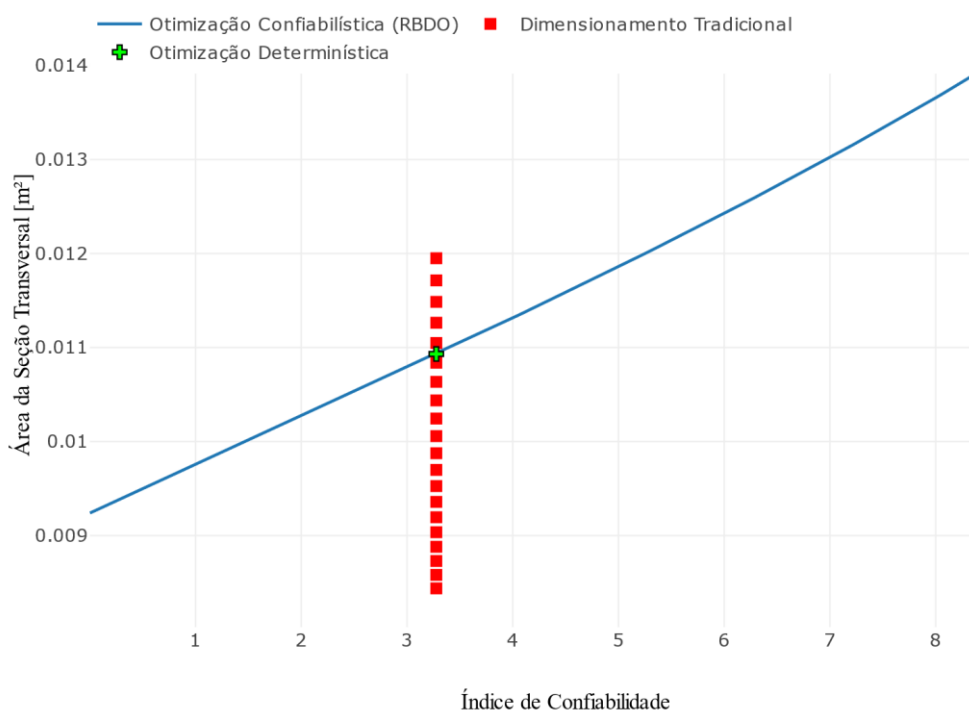


Figura 1. Comparação dos métodos de dimensionamento. Fonte: Autores (2019).

No presente trabalho e a título de ilustração, índices de confiabilidade em torno de 3 e 4 representam, respectivamente, probabilidades de falha ( $P_f$ ) de, aproximadamente, 0,13% e 0,0032%, as quais denotam a chance de que a carga atuante sobre o pilar seja maior ou igual que a capacidade resistente do mesmo.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme apresentado na Fig. 1, o índice de confiabilidade referente aos dimensionamentos tradicional e ótimo determinístico é de 3,276 ( $P_f = 0,052\%$ ), estando diretamente ligado ao coeficiente de segurança empregado. Contudo, este é oriundo de um texto normativo, sem qualquer relação específica com o problema supracitado, além de não carregar informações acerca das incertezas existentes.

A problemática com relação à adoção de coeficientes de segurança é facilmente evidenciada ao se perturbar o comportamento das V.A's. Por exemplo, admitem-se diferentes valores para o desvio padrão do módulo de elasticidade do material e então, apresenta-se o índice de confiabilidade dos dimensionamentos e suas respectivas probabilidades de falha, conforme a Tabela 2, a seguir:

Tabela 2. Índice de confiabilidade para diferentes cenários de incertezas. Fonte: Autores (2019)

---

| Desvio Padrão ( $\sigma_E$ ) | Índice de Confiabilidade ( $\beta$ ) | Probabilidade de Falha ( $P_f$ ) |
|------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1,5 GPa                      | 3,062                                | 0,109%                           |
| 2,0 GPa                      | 2,664                                | 0,386%                           |
| 2,5 GPa                      | 2,325                                | 1,003%                           |
| 3,0 GPa                      | 2,045                                | 2,042%                           |

---

Dessa forma, fica clara e evidente a sensibilidade dos métodos tradicionais de dimensionamento para com o comportamento das variáveis de projeto. Contudo, ao se valer de técnicas de otimização baseada em confiabilidade, o projetista tem a oportunidade de minimizar os custos globais do empreendimento, sem afetar o nível de segurança do mesmo.

Para que técnicas de RBDO sejam incorporadas aos projetos dos mais diversos âmbitos da engenharia faz-se necessária a criação de um banco de dados referentes aos parâmetros que se busca descrever, os quais devem ser tratados estatisticamente e disponibilizados para os interessados.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento**. Rio de Janeiro. 2003.

BECK, A.T. **Curso de Confiabilidade Estrutural: notas de aula**. Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

MELCHERS, R. E. **Structural reliability analysis and prediction**. John Wiley and Sons. 1999.

SAGRILO, L.V.S. **Confiabilidade estrutural: notas de aula**. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

SHAN, S; WANG, G. G. **Reliable design space and complete single-loop reliability-based design optimization**. Reliability Engineering and System Safety, ELSEVIER. V. 93, p. 1218-1230. Agosto, 2007.