ANÁLISE DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS EMPREGANDO FORMULAÇÃO 2D DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

LIMA, Artur Carvalho de Siqueira[1];
BARBIRATO, João Carlos Cordeiro[2]
[1] Graduando em Engenharia Civil, UFAL, Maceió, AL, arturcslima@gmail.com.
[2] Doutorado em Engenharia de Estruturas, Maceió, AL, jccb@lccv.ufal.br

[3] Pesquisa CAPES-Jovens Talentos e PIBIC-CNPq-UFAL.

Resumo. *Cada vez mais o engenheiro se depara com problemas onde a solução está atrelada à aplicação de métodos numéricos. Na engenharia de estruturas isso acontece, exigindo do engenheiro o domínio de ferramentas que permitam análises mais próximas da realidade, bem como das exigências da legislação de uso, qualidade e segurança. O presente trabalho apresenta uma implementação computacional da formulação 2D do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise de problemas elástico lineares de engenharia de estruturas, utilizando-se discretização por elementos constantes e lineares descontínuos. Um código computacional foi elaborado na linguagem MATLAB para uso em microcomputadores. Assim, o MEC 2D com a solução fundamental de Kelvin é utilizado para obter os campos de deslocamentos, forças de superfície e tensões no contorno e no domínio. Alguns casos foram processados e os resultados obtidos destacam a adequação da formulação, bem como validação do código elaborado. Com a incorporação de um tratamento gráfico para os dados de saída, verifica-se que os resultados são de grande importância para o entendimento da mecânica das estruturas, tanto para profissionais quanto para estudantes.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos de Contorno, Análise 2D, Problemas de Mecânica das Estruturas*

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) já é um método numérico consagrado nas análises de problemas das engenharias. Faz parte de um grupo de métodos numéricos mais recentes do ponto de vista de aplicações computacionais, dentre os mais utilizados. Em Brebbia (1978) foram lançadas as bases do MEC, bem como esta denominação. O MEC consiste em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, por meio da solução de equações integrais sobre o contorno. Isso reduz de uma unidade as dimensões de problemas analisados, o que leva a menores quantidades de dados de entrada e, consequentemente, menor sistema de equações algébricas. Por outro lado, a matriz do sistema é geralmente cheia e não simétrica. Para obter-se a equação integral de contorno que possibilite a análise do problema, o MEC necessita de uma solução fundamental, que representa a resposta em um ponto do domínio infinito devido à aplicação de força unitária em outro ponto do mesmo. A utilização de uma solução fundamental, que genericamente pode ser classificada como uma desvantagem, na verdade proporciona versatilidade e precisão ao método, segundo Becker (1992) e Cavalcante *et al* (2011). O MEC tem emergido como uma força alternativa, principalmente nos problemas cujos domínios são estendidos ao espaço infinito (ou semi-infinito), segundo Sá & Telles (1986), Barbirato (1991) e Coda (1993). Nestes casos, a rede de elementos utilizada pelo MEC na discretização do contorno necessita modelar apenas parte deste, uma vez que a solução fundamental utilizada no método já contempla a influência do infinito (ou semi-infinito). A utilização de métodos aproximativos para resolução de problemas da engenharia é algo cada vez mais exigida na prática, estando o presente trabalho inserido nesse contexto. Ressalte-se que as ferramentas computacionais para análise e apresentação dos dados e resultados, são cada vez mais importantes para dialogar com o usuário. Assim, a plataforma MATLAB foi escolhida para uso pois já está inserida nas graduações de engenharia (da UFAL) e permite o uso de funções pré-definidas, que fazem o código mais atual.

2. METODOLOGIA

A pesquisa foi iniciada com um levantamento bibliográfico sobre o Método dos Elementos de Contorno (MEC), seguindo para a sua formulação, de maneira introdutória, abordando sua relação com diversas matérias já vistas no curso de engenharia civil, propriamente no campo das estruturas, e evidenciadas as relações mais importantes para a implementação computacional. Na sequência, foram aprofundados os conhecimentos na parte da elastostática 2D e suas aplicações na engenharia civil (Dória, 2005), que foram usados para o desenvolvimento do algoritmo computacional aqui utilizado. Em resumo, pode-se pontuar as equações a seguir.

A equação integral que rege o problema é:

$$c_{ij}(S)u_j(S) = -\int_{\Gamma} p^*_{ij}(S,Q)\cdot u_j(Q)\cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u^*_{ij}(S,Q)\cdot p_j(Q)\cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u^*_{ij}(S,q)\cdot b_j(q)\cdot d\Omega(q), \qquad (1)$$

sendo, $c_{ij}(S) = 0$, para pontos externos ao domínio Ω; $c_{ij}(S) = \mathbf{I}$, para pontos internos ao domínio Ω e $c_{ij}(S) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$, para pontos de um contorno sem angulosidades ("smooth"); e **I** é a matriz identidade (aqui de ordem 2x2, para cada ponto de colocação S).

Aproximando o contorno do sólido (domínio, representando a estrutura) em "J" elementos, com "N" pontos nodais (nós funcionais), e o seu domínio em "M" células, a representação integral para deslocamentos, chega-se a:

$$c(S)u(S) = -\sum_{j=1}^{J}\left[\int_{\Gamma_j}\mathbf{p}^*(S,Q)\boldsymbol{\phi}^T(Q)d\Gamma(Q)\right]\mathbf{U}^n + +\sum_{j=1}^{J}\left[\int_{\Gamma_j}\mathbf{u}^*(S,Q)\boldsymbol{\phi}^T(Q)d\Gamma(Q)\right]\mathbf{P}^n + \sum_{m=1}^{M}\left[\int_{\Omega_m}\mathbf{u}^*(S,q)\boldsymbol{\phi}_c^T(q)d\Omega(q)\right]\mathbf{B}^n, \quad (2)$$

Resultando, de modo genérico, em:

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GP} + \mathbf{DB}. \quad (3)$$

O sistema de equações algébricas abaixo pode ser montado a partir da definição das matrizes **H**, **G** e **D** e dos valores prescritos de deslocamentos **U**, forças de superfície **P** e forças de volume **B**. Assim,

$$\mathbf{AV_{DF}} = \mathbf{F} \quad (4)$$

sendo: **A** é uma matriz de ordem 2Nx2N que contém elementos das matrizes **H** e **G** devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície; $\mathbf{V_{DF}}$ é o vetor das incógnitas, deslocamentos e forças de superfícies, de acordo com as condições de contorno; e F o vetor independente formado pela multiplicação dos coeficientes das matrizes **H** e **G** relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, somando-se, ainda, valores da parcela das forças de volume.

Para a construção do programa referente ao elemento constante, início do estudo de iniciação científica, foram usadas como base as rotinas em Brebbia & Dominguez (1977), as quais se encontram na linguagem computacional FORTRAN. A linguagem FORTRAN é bastante apropriada para o uso científico, embora tenha uma sintaxe muito rígida e antiga. As plataformas computacionais da atualidade permitem melhores interações com o usuário, tal como MATLAB (Hanselman & Littlefield, 2003). Além do mais, vários cursos de engenharia adotam essa plataforma; o de Engenharia Civil da UFAL é um exemplo (curso do Bolsista). O programa desenvolvido tem como objetivo resolver problemas elastostáticos 2D com elementos constantes.

Em outro grupo de iniciação científica, procurou-se complementar os conhecimentos de desenvolvimento da computação do MEC, implementando um elemento linear descontínuo para permitir melhor discretização e, portanto, melhores respostas. Elaborou-se, então, outro código computacional, denominado MEC 2D, que resulta em análise de sólidos solicitados por forças mecânicas, que podem ter seu domínio estratificado em sub-regiões com características físicas diferentes, tal como um compósito. As inclusões, por sua vez, também podem ser tratadas, conseguindo-se os deslocamentos e tensões em pontos internos de cada uma das fases do domínio.

3 RESULTADOS

Aplicação 1:

Foi analisada pelo programa com elementos constantes uma viga com a extremidade esquerda engastada e a da direita livre, com 2m de comprimento e 0,4m de altura. Uma força de 150kN solicita os pontos da extremidade direita. Dados da viga: módulo de elasticidade transversal = 80000 e coeficiente de Poisson = 0,2. A figura 1 traz a geometria da viga a ser analisada, sem os efeitos da solicitação da carga. Já a figura 2 apresenta a deformada da estrutura quando submetida à força externa solicitante.

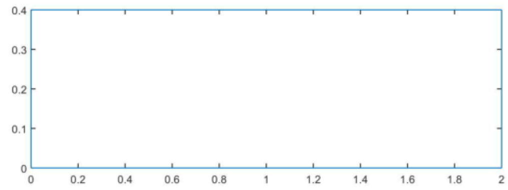


Figura 1. Barra antes de submetida à força externa

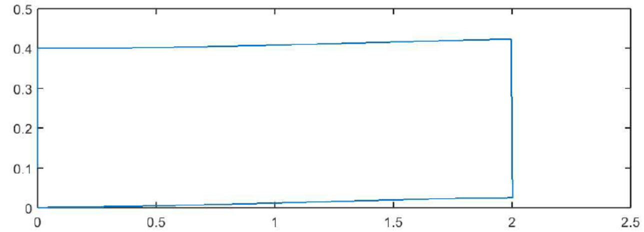
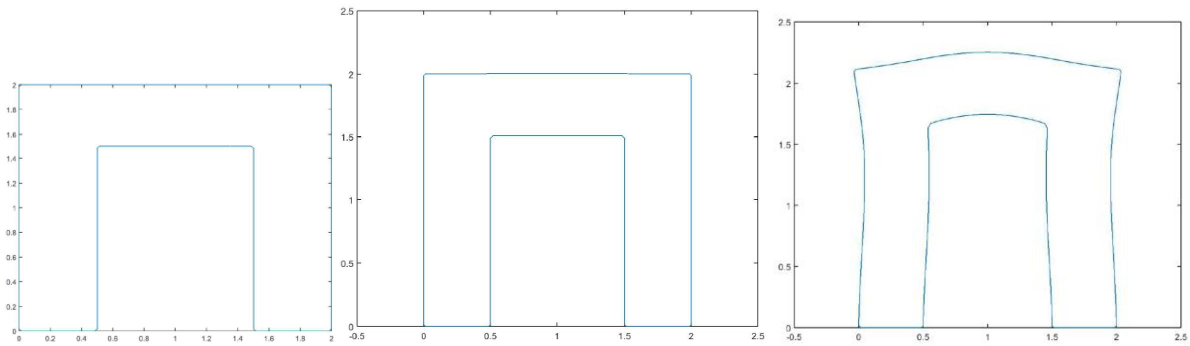


Figura 2. Barra depois da aplicação à força externa (deformada)

Aplicação 2:

Outra estrutura analisada com o programa de elementos constantes foi um pórtico engastado na base, com diferentes módulos de elasticidade e diferentes forças aplicadas. Utilizou-se parâmetros estruturais realistas, como os de concreto e outro de material bem mais flexível. Aplicou-se forças verticais para cima em sua face superior. As figuras 3 (a,b,c), a seguir, representam os casos abordados. Verifica-se um comportamento de pequenas deformações na figura 3.a, por conta do material concreto utilizado. Já no caso de material bem mais flexível, as deformações foram bastante excessivas, conforme 3.c.

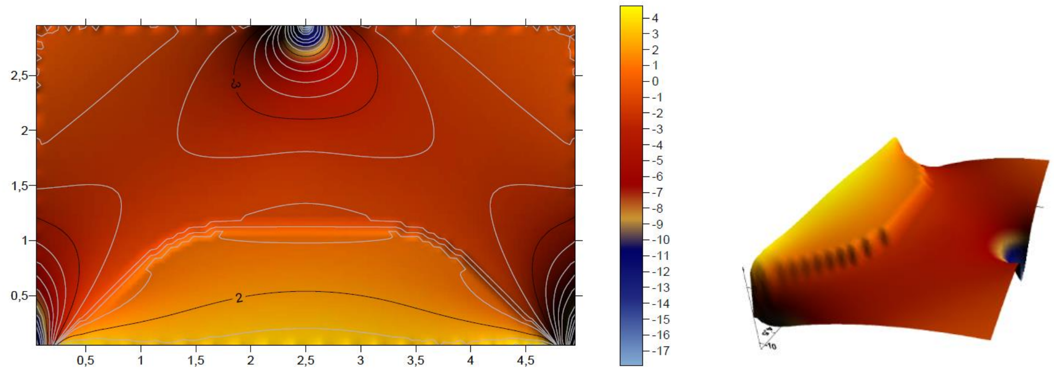


(a) (b) (c)

3. FIGURA 3. (A) PÓRTICO ANALISADO; (B) PÓRTICO DE CONCRETO COM P = 100KN; (C) PÓRTICO DE MATERIAL MAIS FLEXÍVEL COM P = 300N

Aplicação 3:

Utilizando-se o código MEC 2D, de elementos lineares descontínuos, foi possível analisar uma viga-parede medindo 5,0m x 3,0m, biapoiada, com um carregamento concentrado de 5.0, com módulo de elasticidade longitudinal de 2.600 e Poisson igual a 0,21. A ideia foi detectar o campo de tensões internas, caracterizando-se o modelo de bielas e tirantes. A figura 4 demostra bem essa hipótese lançada, com auxílio de plotador gráfico.



(a) (b)

Figura 4. Campo de tensões internas, com as tensões principais máximas – a) em curvas de nível; e b) em superfície.

4 CONCLUSÕES

Os algoritmos computacionais aplicados a problemas da engenharia são ferramentas muito importantes para uma rápida e eficiente resolução dos mesmos. O que pode ser feito com ferramentas utilizadas na própria graduação do curso, como é o caso da implementação computacional trabalhada na primeira fase da presente pesquisa, a do MEC 2D elementos constantes, bem como a segunda fase, com o MEC 2D elementos lineares descontínuos, utilizando a linguagem do *MATLAB*. A adoção desta linguagem facilitou o entendimento do processo computacional envolvido, pois a mesma utiliza de uma sintaxe simples e nela é contido um depurador de erros lógicos, o que permitiu ao pesquisador entender e solucionar os erros de maneira fácil e conveniente. A análise dos resultados, que inicialmente foi tomada de uma maneira intuitiva e depois comparada com os resultados conhecidos, pois os casos adotados foram problemas consagrados da engenharia, que podem ter suas respostas checadas de maneira simples, mostrou que os algoritmos conseguiram entregar resultados com um erro extremamente baixo quando se utiliza de uma boa amostragem de pontos. O processamento do programa em computadores modernos ocorre também de forma quase instantânea no caso dos problemas analisados.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a disponibilidade de bolsa de Iniciação Científica, ofertada pelo Programa Jovens Talentos CAPES-UFAL, fundamental como estímulo à introdução à pesquisa nas engenharias. Igualmente, estende-se para a infraestrutura disponibilizada pelo LCCV/CTEC.

REFERENCIAS

Barbirato, J.C.C. (1991). *Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin*. São Carlos, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Becker, A.A. (1992). *The boundary element method in engineering.* London, MacGraw-Hill.
Brebbia, C.A. & Dominguez, J. (1977). Boundary Elements. An Introductory Course.

Brebbia, C.A. (1978) *The boundary element method for engineers*, London, Pentech Press.

Cavalcante, M. A. A., marques, S. P. C and pindera, M-J (2011). *Transient Finite-Volume Analysis of a Graded Cylindrical Shell Under Thermal Shock Loading.* Mechanics of Advanced Materials and Structures, 18: 1, 53 - 67.

Coda, H.B. (1993). *Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Dória, A. (2005) Abordagem de problemas de engenharia através do método dos elementos de contorno. Monografia de graduação – UFAL

Hanselman, D. & Littlefield, B. (2003). *MATLAB 6: curso completo*. Editora Prentice Hall.