



CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE SISTEMAS APLICADA A TRELIÇAS PLANAS

LEÃO LESSA, João Paulo¹;

LIMA JUNIOR, Eduardo Toledo de²

¹ Graduando em Engenharia Civil, UFAL, Maceió, Alagoas, joaopaulolessa_@hotmail.com.

² Professor, UFAL, Maceió, Alagoas, limajunior@lccv.ufal.br.

³ Trabalho desenvolvido através de pesquisas realizadas pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

Resumo. São diversas as incertezas associadas aos projetos de Engenharia de Estruturas, as quais induzem diferenças entre o comportamento previsto e o desempenho observado das estruturas. A variabilidade das dimensões dos elementos estruturais, das propriedades dos materiais e dos carregamentos é a principal fonte dessas incertezas. A teoria de confiabilidade as incorpora a partir da descrição estatística das variáveis de projeto, e permite a quantificação da probabilidade de falha de uma estrutura, podendo assim determinar em quais condições de uso um determinado estado limite será atingido. Contudo, os elementos que constituem uma estrutura geralmente apresentam múltiplos modos de falha simultâneos, devendo-se empregar à análise confiabilística os conceitos de sistemas estruturais. Propõe-se neste trabalho a aplicação de confiabilidade de sistemas a problemas simples de análise estrutural de estruturas reticuladas, envolvendo modos de falha associados em série e em paralelo, como será visto em uma treliça hiperestática. A estimativa da probabilidade de falha é feita a partir do método semi-analítico FORM (First Order Reliability Method), implementado em linguagem Python.

Palavras-chave: Confiabilidade de sistemas, estruturas reticuladas, FORM.

1 INTRODUÇÃO

A análise de confiabilidade aplicada a um projeto estrutural permite a avaliação da probabilidade de falha (P_f) da estrutura para um determinado estado limite, de forma que esta pode ser prevista, com valor adequado, ainda na fase de projeto. Existem várias incertezas nos projetos de Engenharia que provocam diferenças entre o comportamento previsto da estrutura e sua performance em serviço. Algumas fontes de incertezas são: a variabilidade dimensional de elementos estruturais, das cargas aplicadas à estrutura e das propriedades dos materiais.

As incertezas associadas às variáveis de projeto são quantificadas ao se tratar estas variáveis como aleatórias (v.a.), agrupadas num vetor \mathbf{X} . Assim, tem-se a chamada função de distribuição acumulada de probabilidades (CDF), que é dada, para n variáveis, pela Equação 1.

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (1)$$

Já a derivada da função CDF em relação ao conjunto das v.a. \mathbf{X} é a chamada função densidade de probabilidades (PDF) (Equação 2). Esta função representa a distribuição conjunta de probabilidades das n variáveis de interesse.

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

Um modelo de confiabilidade envolve, além do tratamento das v.a., a definição de uma função de falha que representa o estado limite da estrutura que se deseja verificar, seja este de serviço (ELS) ou último (ELU). Valores positivos da função de falha $G(\mathbf{X})$ estão associados à sobrevivência da estrutura, e valores negativos indicam falha. O problema de confiabilidade consiste no cálculo da probabilidade de ocorrência de valores das v.a. dentro do domínio de falha da estrutura, ou seja:

$$P_f = P[\mathbf{X} \in D_f] = \int \dots \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

cuja integral pode ser de difícil solução analítica, em casos que envolvam muitas v.a., e por conta da natureza não linear das PDFs de modelos estatísticos usuais. Dentre os métodos utilizados na resolução, tem-se o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), um procedimento semi-analítico que fornece o chamado índice de confiabilidade (β), o qual tem interpretação oposta à de P_f .

O FORM se baseia na transformação das v.a. originais em normais equivalentes reduzidas, onde utiliza-se o modelo de Hassofer-Lind, que reduz as v.a. dependentes \mathbf{X} em v.a. reduzidas dependentes \mathbf{Z} . Com isso, há a necessidade de se calcular os coeficientes de correlação equivalentes através da transformação de Nataf (1962), e em seguida a eliminação da correlação entre as variáveis aleatórias. Neste ponto, há a transformação das v.a. \mathbf{Z} em v.a. reduzidas independentes, denominadas por \mathbf{Y} , onde, na maioria dos casos, utiliza-se a decomposição de Cholesky para fatorar a matriz de correlação das v.a. Detalhes acerca deste método podem ser encontrados em Beck (2014) e Melchers (1999).

Além do FORM, existe a simulação de Monte Carlo, que produz uma quantidade N de eventos randômicos, que são avaliados frente à equação $G(\mathbf{X})$. Assim, os eventos com valores negativos são reconhecidos como eventos de falha. Com isso, a probabilidade de falha é calculada através da razão entre o número de falhas (N_f) e o número total de eventos.

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (4)$$

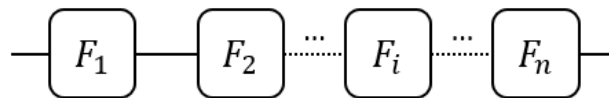
2 CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

Os elementos que compõem uma estrutura, em geral, apresentam múltiplos modos de falha, assim como os sistemas estruturais. Com isso, há a necessidade do estudo acerca da confiabilidade de sistemas estruturais.

2.1 Componentes associados em série

Para os sistemas associados em série, a falha de um elemento estrutural significa a falha da estrutura, ou seja, para que o sistema permaneça íntegro, todos os elementos devem estar funcionando. Na Figura 1 tem-se a representação do esquema de um sistema em série.

Figura 1 - Sistema formado por componentes associados em série.



Fonte: Autor.

Seja E_i o evento que corresponda à falha do i -ésimo elemento estrutural, o evento que corresponde à falha do sistema é dado pela união dos eventos de falha dos componentes.

$$F = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad (5)$$

Logo, a probabilidade de falha de sistemas em série é dada pela Equação 5.

$$P_f = P[F] = P[\bigcup_{i=1}^n E_i] \quad (6)$$

As estruturas isostáticas se apresentam como um caso clássico de sistemas onde os componentes estruturais estão associados em série, devido à falta de redundância.

Em Sagrilo (2003), apresenta-se uma forma de análise da probabilidade de falha de sistemas em série, que é através de equação única, dada por:

$$\Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{i,j}) = \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{i,j}} \varphi(-\beta_i, -\beta_j, \rho) d\rho \quad (7)$$

Onde $\Phi(\cdot)$ é a função cumulativa bidimensional normal padrão, β_i e β_j são os índices de confiabilidade de cada componente, $\rho_{i,j}$ é a correlação entre dois componentes e $\varphi(\cdot)$ é a função densidade de probabilidades bidimensional padrão. A probabilidade de falha de um sistema em série também pode ser determinada através do cálculo dos limites superior e inferior da probabilidade de falha do sistema (Ditlevsen, 1979).

2.2 Componentes associados em paralelo

Segundo Verzenhassi (2008), para que haja a falha de um sistema formado por componentes em paralelo, um número mínimo de elementos deve falhar. Na Figura 2 está ilustrado um esquema de elementos associados em paralelo.

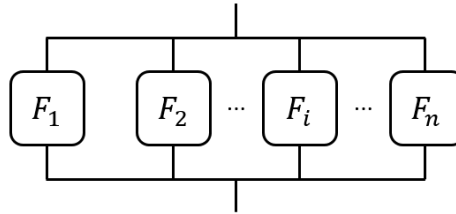
Chamando-se de E_i o evento que diz respeito a falha do i -ésimo componente de uma estrutura, o evento de falha do sistema como um todo será dado pela intersecção destes:

$$F = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots \cap E_n = \bigcap_{i=1}^n E_i \quad (8)$$

O que implica que a probabilidade de falha de sistemas em paralelo é dada por.

$$P_f = P[F] = P[\cap_{i=1}^n E_i] \quad (9)$$

Figura 2 - Sistema formado por componentes associados em paralelo.



Fonte: Autor.

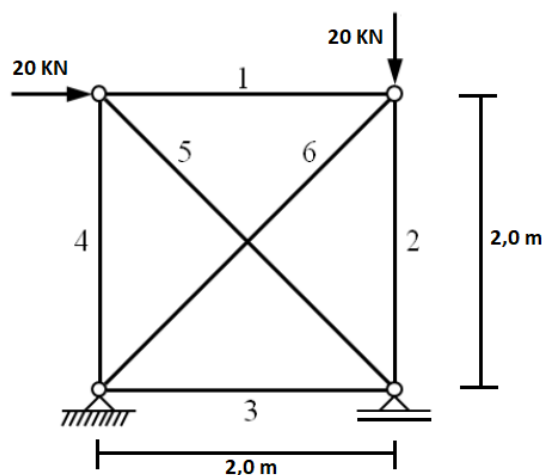
As estruturas hiperestáticas se apresentam como exemplos de sistemas em paralelo, onde a falha na estrutura irá acontecer mediante a falha de um número suficiente de membros. Para decompor a falha da estrutura, usamos uma árvore de falhas, onde desmembramos o evento principal (colapso da estrutura) em combinações de eventos básicos, onde estes são conhecidos e podem ser calculados.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplica-se os conceitos apresentados à resolução de um problema de análise confiabilística de componentes associados em paralelo. Logo, a avaliação da P_f de cada componente será feita via FORM, implementado em linguagem Python.

Seja a treliça hiperestática mostrada na Figura 2, composta por perfis tubulares, com diâmetro $D = 57mm$ e espessura de parede de $t = 5mm$. O aço possui módulo de elasticidade $E = 205GPa$ e tensão de escoamento igual a $\sigma_y = 250MPa$.

Figura 2 – Modelo de cálculo do exemplo.



Fonte: Adaptado de BECK (2014).

Os parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias (média e desvio padrão) estão dados em função dos coeficientes *mean* e COV, onde obtém-se o valor médio da variável aleatória multiplicando o valor nominal pelo fator apresentado. Já o desvio padrão é calculado multiplicando o valor médio pelo coeficiente de variação COV.

Tabela 1 - Parâmetros estatísticos das v.a. do problema.

v.a.	mean	COV	Distribuição	v.a.	mean	COV	Distribuição
<i>D</i>	Nominal	0,02	Normal	<i>E</i>	1,04	0,05	Normal
<i>t</i>	Nominal	0,02	Normal	σ_y	1,03	0,063	Log Normal

Assumindo que a estrutura pode falhar tanto por flambagem (barras comprimidas), quanto por escoamento do material (barras tracionadas), as equações de estado limite serão:

$$G_1(E, D, t) = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} - N^{barra_i} \quad (10)$$

$$G_2(\sigma_y, D, t) = \sigma_y - \frac{N^{barra_i}}{A} \quad (11)$$

Na Tabela 2 apresenta-se os esforços normais de cada barra, assim como os parâmetros confiabilísticos calculados.

Tabela 2 - Dados calculados.

Barra	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
<i>N</i> (KN)	-7,9	-27,9	12,1	12,1	-17,1	11,2
<i>Pf</i>	0,3398	0,4429	1E-4	1E-4	0,4498	1E-5
β	0,2013	0,1325	53,207	53,207	0,1261	57,857

Percebe-se que o modo de falha predominante será através das barras comprimidas. Com isso, pode-se considerar apenas as sequências de falha para as barras (1), (2) e (5), visto que as probabilidades de falha das barras restantes estão na ordem de 10^{-4} , e por isso foram negligenciadas. As sequências de falha serão:

$$\text{Sequência 1} \rightarrow P[S_1] = P[B_1] \cdot P[B_2/B_1 \cup B_3/B_1 \cup B_4/B_1 \cup B_5/B_1 \cup B_6/B_1] \quad (12)$$

$$\text{Sequência 2} \rightarrow P[S_2] = P[B_2] \cdot P[B_1/B_2 \cup B_3/B_2 \cup B_4/B_2 \cup B_5/B_2 \cup B_6/B_2] \quad (13)$$

$$\text{Sequência 3} \rightarrow P[S_3] = P[B_5] \cdot P[B_1/B_5 \cup B_2/B_5 \cup B_3/B_5 \cup B_4/B_5 \cup B_6/B_5] \quad (14)$$

Tão logo, para a falha de cada barra do sistema original, teremos uma respectiva treliça isostática, onde os esforços serão recalculados para o novo sistema estrutural, e por consequência será verificada a probabilidade de falha em série dos seus elementos ($P[B_i/B_j]$).

A probabilidade de falha em série será calculada por equação única, vista anteriormente. Para isso, calcula-se as correlações entre os modos de falha, que são dados pelo produto entre o vetor α_i (cossenos diretores) de um modo de falha, pelo transposto do vetor α_j do consequente modo. Com isso, aplica-se as correlações na Equação 7, assim como os respectivos modos de falha, e calcula-se as probabilidades de falha cruzadas (P_{BiBj}).

Com isso, a sequência de falha 1 fica da seguinte forma:

$$P[S_1] = P[B_1] \cdot (P[B_2/B_1] + P[B_3/B_1] + \dots + P[B_6/B_1] - P_{B_2B_3} - P_{B_2B_4} - \dots - P_{B_5B_6}) \quad (15)$$

Aplicando-se os cálculos feitos via FORM às três sequências de falha vistas anteriormente, tem-se as seguintes probabilidades de falha em paralelo:

$$P[S_1] = 0,3398 \cdot 0,4582 = 0,1556 \quad (16)$$

$$P[S_2] = 0,4429 \cdot 0,4766 = 0,2112 \quad (17)$$

$$P[S_3] = 0,4498 \cdot 0,4617 = 0,2076 \quad (18)$$

Nota-se que no cálculo das probabilidades de falha em série, os valores convergem para as probabilidades de falha dominantes, ou seja, para os valores de falha das barras com maior risco de romper. Isso pode ser visto com mais detalhes em Sagrilo (2003).

Pode-se então observar que a maior probabilidade de falha para a treliça hiperestática se dará com a sequência de falha 2, onde a barra (2) irá falhar, e por consequência o sistema estrutural isostático formado terá uma probabilidade de falha de $P_{f2} = 0,4766$. A árvore de falhas para o problema em questão pode ser elaborada com base nos valores calculados, de acordo com Beck (2014).

4 REFERÊNCIAS

ANG, A. H-S.;TANG, W. H. Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering. Hoboken:John Wiley&Sons, 2007.

BECK, A. T. Curso de confiabilidade estrutural: notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

LIMA JUNIOR, E. T. Introdução à confiabilidade estrutural – notas de aula. Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

MELCHERS, R. E. Structural reliability analysis and prediction. Chichester: John Wiley & Sons, 1999.

NATAF, A. Determination des distributions dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, Paris, 225, pp.42-43, 1962.

SAGRILO, L. V. S. Confiabilidade estrutural: notas de aula. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia – UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

VERZENHASSI, C. C. *Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade*. 2008. 154 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2008.